



吉林云校中小学课程资源

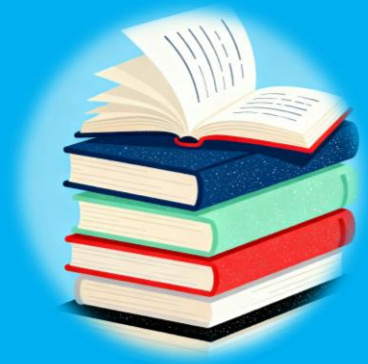
## 3.2.2双曲线的简单几何性质

年 级：高二

学科：数学（人教A版）

主讲人：周仁哲

学校：东北师范大学附属中学





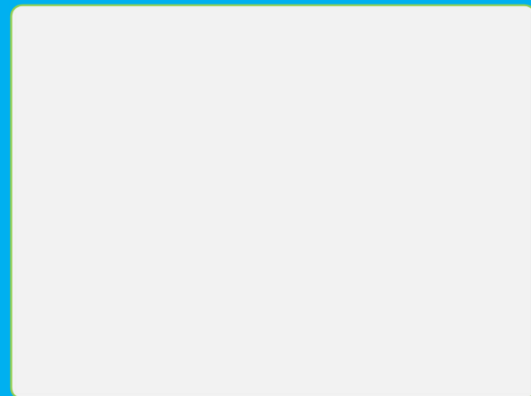
课前活动

类比椭圆的几何性质的研究,你认为应该研究双曲线

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0) \text{ —— ①}$$

的哪些几何性质?如何研究这些性质?

范围,对称性、顶点、离心率等





观察双曲线,你可以发现双曲线上点:  
横坐标和纵坐标的范围分别是什么?

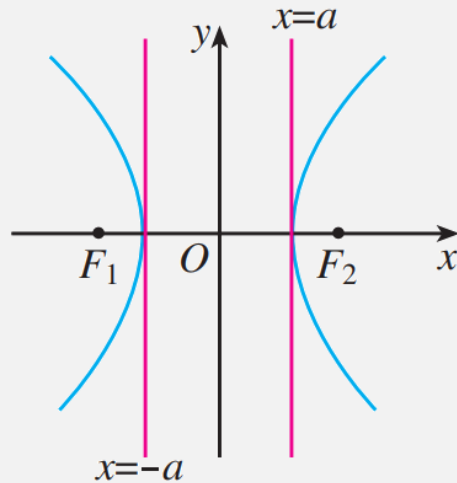
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0) \text{ --- ①}$$

由方程①可得  $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1$ ,

于是,双曲线上点的坐标 $(x, y)$  都适合

不等式  $\frac{x^2}{a^2} \geq 1, y \in \mathbf{R}$ , 即  $x^2 \geq a^2, y \in \mathbf{R}$ ,

所以  $x \leq -a$  或  $x \geq a, y \in \mathbf{R}$ .



**结论: 双曲线的简单几何性质一: 范围**

双曲线位于直线  $x = -a$  及其左侧和直线  $x = a$  及其右侧的区域.

**跟踪训练1:**

在双曲线  $16x^2 - 9y^2 = 144$  中,  $x$  的取值范围是  $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$  .

**解析**

由双曲线  $16x^2 - 9y^2 = 144$ , 可得:  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ , 所以  $a^2 = 9$ , 则  $a = 3$ ,

故  $x$  的取值范围是  $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$ ,



## 跟踪训练2:

若集合  $A = \{x \mid \frac{x^2}{4} - y^2 = 1\}$ , 则  $A = \underline{(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)}$

## 解析

因为  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ ,  $a = 2$ , 所以  $x \geq 2$  或  $x \leq -2$ , 即  $A = \{x \mid x \geq 2 \text{ 或 } x \leq -2\}$



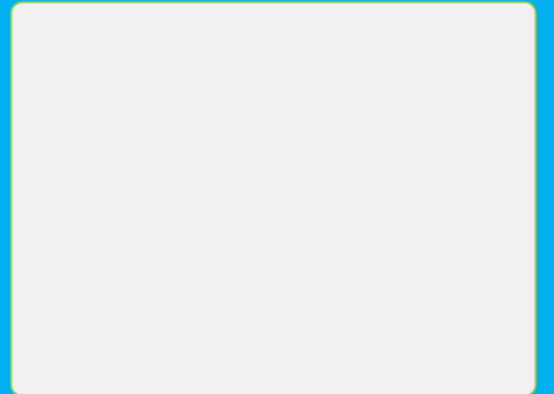
类比研究椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  对称性的方法，得到什么结论？

容易得到，双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$

关于  $x$  轴、 $y$  轴和原点都是对称的。

这时，坐标轴是双曲线的对称轴，原点是双曲线的对称中心  
双曲线的对称中心叫做**双曲线的中心**。

结论：双曲线的简单几何性质二：对称性  
双曲线关于  $x$  轴、 $y$  轴和原点都是对称的。



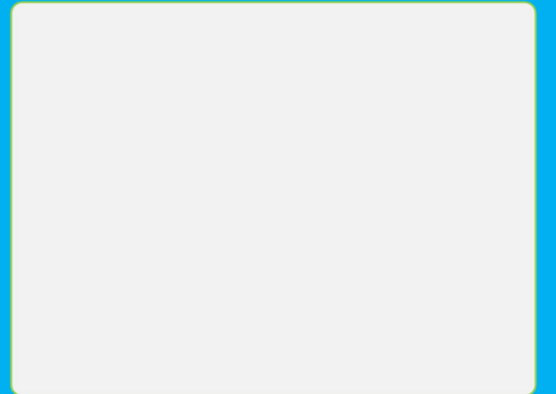
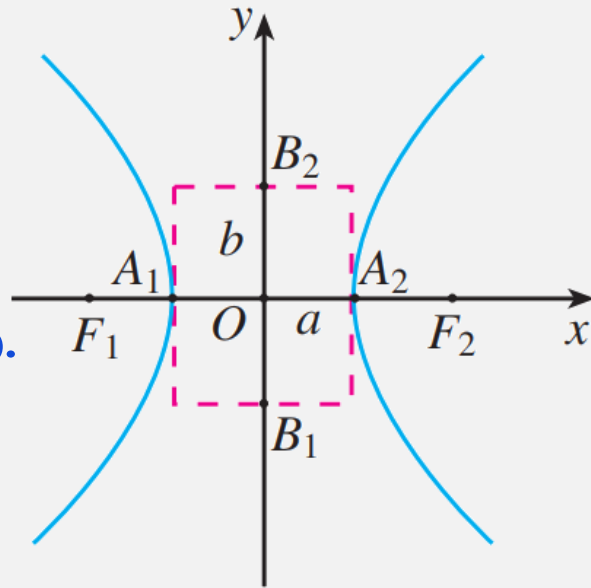


类比求椭圆顶点的方法, 尝试求双曲线的顶点

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0) \text{ --- ①}$$

在方程①中, 令  $y = 0$ , 得  $x = \pm a$ ,  
因此双曲线和  $x$  轴有两个交点  $A_1(-a, 0)$ ,  $A_2(a, 0)$ .  
因为  $x$  轴是双曲线的对称轴,  
所以双曲线和它的对称轴有两个交点,  
它们叫做双曲线的顶点.

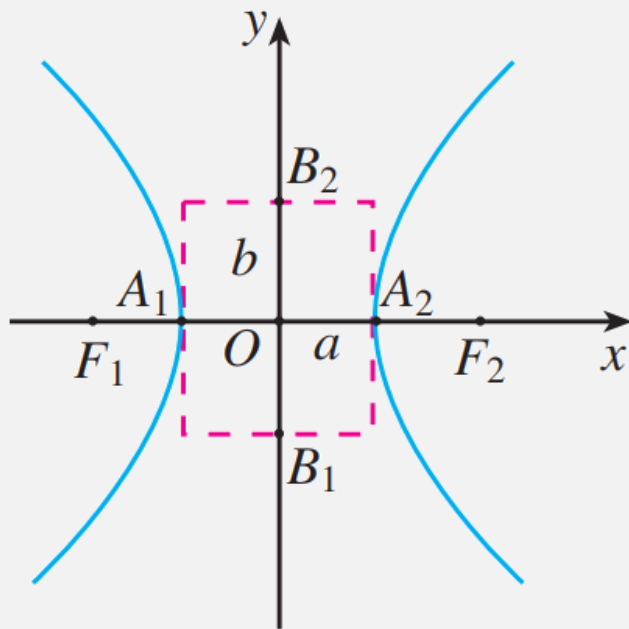
令  $x = 0$ , 得  $y = \pm b$ , 这个方程没有实数解,  
说明双曲线和  $y$  轴没有公共点,  
但我们也把  $B_1(0, -b)$ ,  $B_2(0, b)$  两点画在  $y$  轴上.





线段 $A_1A_2$ 叫做**双曲线的实轴**,它的长等于 $2a$ ,  
 $a$ 叫做双曲线的**实半轴长**;

线段 $B_1B_2$ 叫做**双曲线的虚轴**,它的长等于 $2b$ ,  
 $b$ 叫做双曲线的**虚半轴长**.



**结论：双曲线的简单几何性质三：顶点**

焦点在 $x$ 轴上的双曲线有两个顶点： $(-a, 0)$ 与 $(a, 0)$

焦点在 $y$ 轴上的双曲线有两个顶点： $(0, -a)$ 与 $(0, a)$



利用信息技术画出双曲线  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

和两条直线  $\frac{x}{3} \pm \frac{y}{2} = 0$ ,

在双曲线  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$  的右支上取一点  $M$ ,

测量点  $M$  的横坐标  $x_M$

以及它到直线  $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 0$  的距离  $d$ .

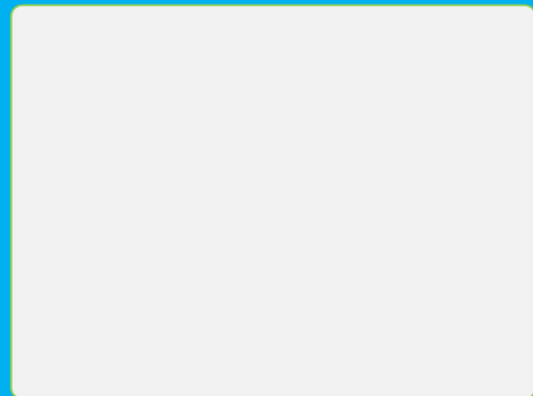
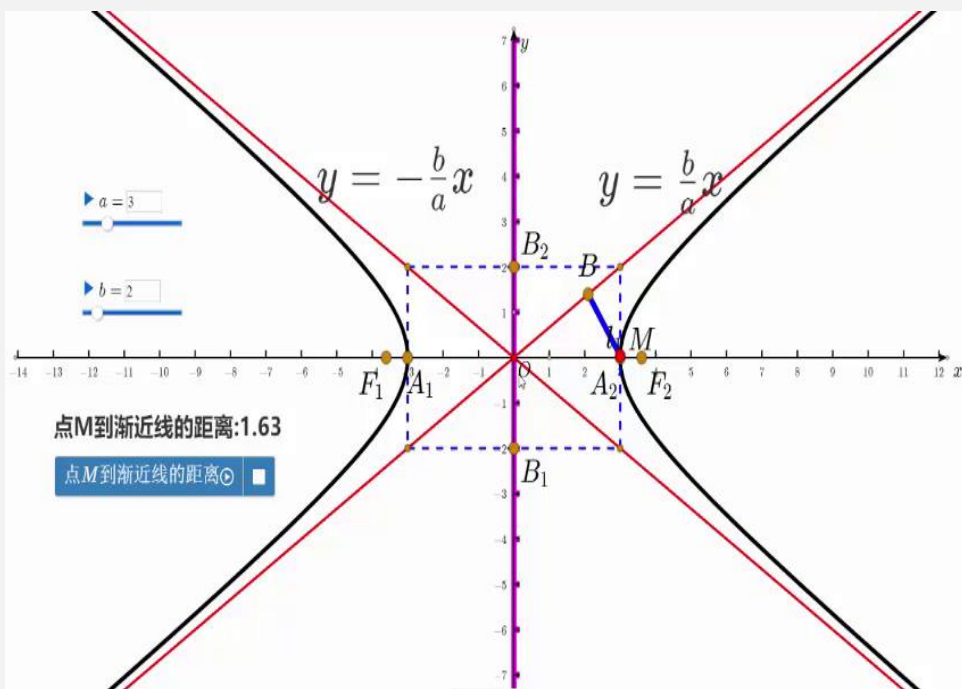
沿曲线向右上方拖动点  $M$ ,

观察  $x_M$  和  $d$  的大小关系, 你发现了什么?

可以发现,

点  $M$  的横坐标  $x_M$  越来越大,

$d$  越来越小, 但是  $d$  始终不等于 0.





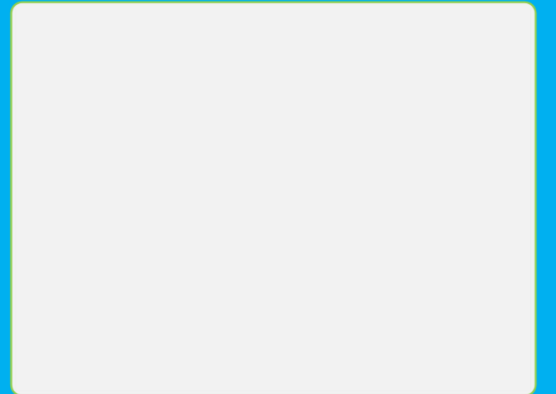
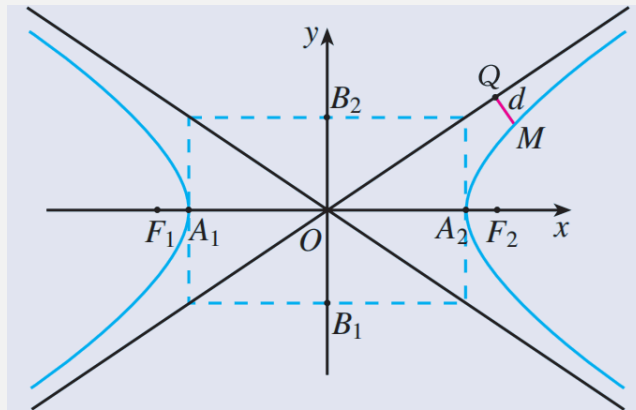
**思考：** 经过两点 $A_1, A_2$ 作 $y$ 轴的平行线  $x = \pm 3$ , 经过两点 $B_1, B_2$  作 $x$ 轴的平行线  $y = \pm 2$ , 四条直线围成一个矩形, 求矩形的两条对角线所在直线的方程

矩形的两条对角线所在直线的方程是：

$$\frac{x}{3} \pm \frac{y}{2} = 0$$

双曲线  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$  的两支向外延伸时, 与

两条直线  $\frac{x}{3} \pm \frac{y}{2} = 0$  逐渐接近, 但永不相交.





一般地,双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$ 的两支向外延伸时,与两条直线 $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ 逐渐接近,我们把这两条直线叫做**双曲线的渐近线**.

**结论: 双曲线的简单几何性质四: 渐近线**

双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$ 的渐近线方程为 $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ ,即 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ;

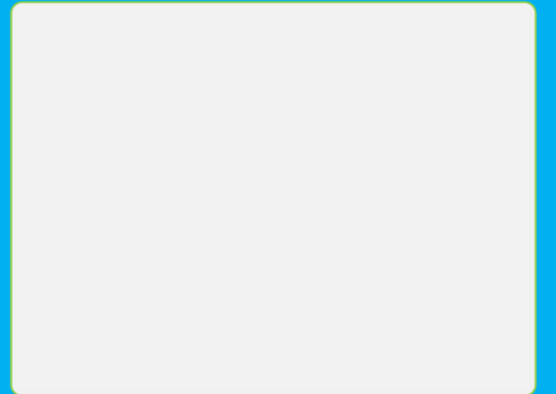
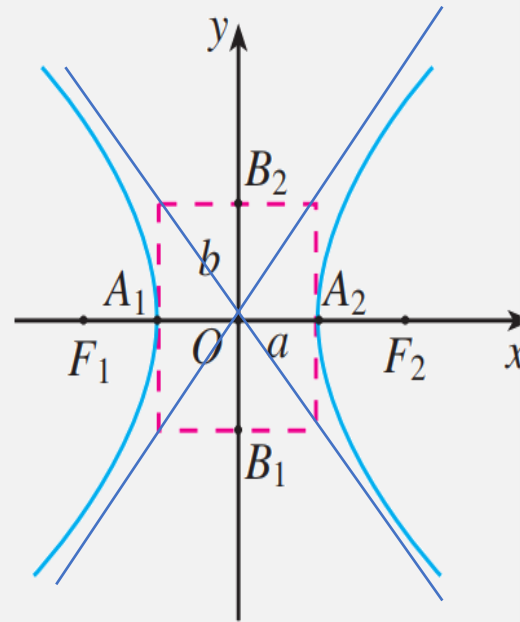
双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$ 的渐近线方程为 $\frac{y}{a} \pm \frac{x}{b} = 0$ ,即 $y = \pm \frac{a}{b}x$ .



与椭圆类似,双曲线的焦距与实轴长的比 $\frac{c}{a}$ ,  
叫做**双曲线的离心率**.

因为 $c > a > 0$ ,所以双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} > 1$ .

**结论：双曲线的简单几何性质五：离心率**





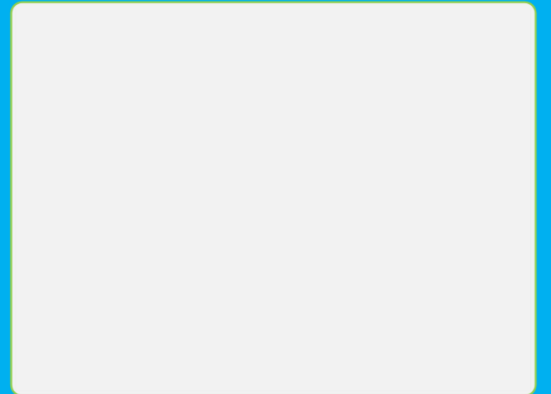
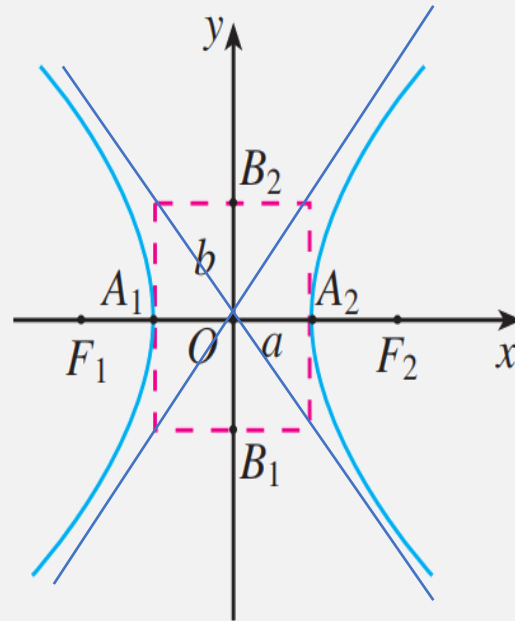
思考：椭圆的离心率刻画了椭圆的扁平程度，  
双曲线的离心率刻画双曲线的什么几何特征？

$$\text{双曲线的离心率 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

离心率越大,  $\frac{b}{a}$  的值越大

渐近线  $y = \frac{b}{a}x$  的斜率越大, 双曲线的“张口”越大.

双曲线的离心率刻画了双曲线的“张口”大小.





在双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  中, 如果  $a = b$ , 那么方程变为  $x^2 - y^2 = a^2$ ,

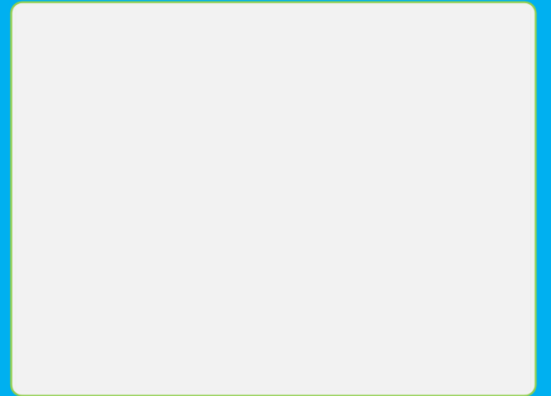
此时双曲线的实轴和虚轴的长都等于  $2a$ .

这时, 四条直线  $x = \pm a, y = \pm a$  围成一个正方形,

渐近线方程为  $y = \pm x$ , 他们互相垂直, 并且平分双曲线的实轴和虚轴所成的角.

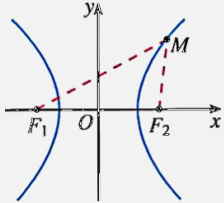
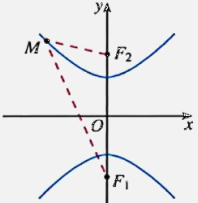
实轴和虚轴等长的双曲线叫做**等轴双曲线**.

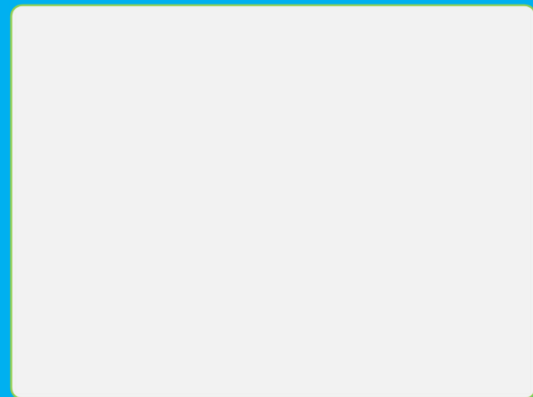
易知, 等轴双曲线的离心率都为  $\sqrt{2}$ .





类比焦点在  $x$  轴上双曲线几何性质，焦点在  $y$  轴上的双曲线的简单几何性质

焦点的位置	焦点在 $x$ 轴上	焦点在 $y$ 轴上
图形		
标准方程	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 (a > 0, b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0 (a > 0, b > 0)$
范围	$x \leq -a, x \geq a, y \in \mathbf{R}$	$x \in \mathbf{R}, y \leq -a, y \geq a$
顶点	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$
轴长	实轴长 = $2a$ , 虚轴长 = $2b$	实轴长 = $2a$ , 虚轴长 = $2b$
焦点	$(\pm c, 0)$	$(0, \pm c)$
对称性	对称轴: $x$ 轴与 $y$ 轴, 对称中心: 原点	对称轴: $x$ 轴, $y$ 轴, 对称中心: 原点
渐近线	$y = \pm \frac{b}{a} x$	$y = \pm \frac{a}{b} x$
离心率	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{a}$





例1

求双曲线 $9y^2 - 16x^2 = 144$ 的实半轴长和虚半轴长,焦点坐标,离心率,渐近线方程.

解析

把双曲线的方程 $9y^2 - 16x^2 = 144$ 化为标准方程 $\frac{y^2}{4^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1$ .

由此可知,实半轴长 $a = 4$ ,虚半轴长 $b = 3$ ;

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ ,焦点坐标是 $(0, -5), (0, 5)$ ;

离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$ ,渐近线方程为 $y = \pm \frac{4}{3}x$ .



**例2** (1) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{5}$ , 则双曲线 $C$ 的渐近线方程为  $y = \pm 2x$ .

### 解析

因为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{5}$ , 所以 $\frac{c}{a} = \sqrt{5}$ ,

两边平方得 $\frac{c^2}{a^2} = 5$ , 所以 $\frac{b^2+a^2}{a^2} = 5$ , 所以 $\frac{b^2}{a^2} = 4$ , 解得 $\frac{b}{a} = 2$ ,

又双曲线的焦点在 $x$ 轴上, 所以双曲线 $C$ 的渐近线方程为 $y = \pm 2x$ .

**例2**

(2) 直线 $\sqrt{2}x - y = 0$  是双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{m} = 1$  的一条渐近线, 则 $m = (D)$

A. 1

B. 4

C. 16

D. 18

**解析**

令双曲线方程等号右侧的 1 变为 0, 可得双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{m}}{3}x$ ,

又直线 $\sqrt{2}x - y = 0$  是双曲线的一条渐近线, 所以 $\frac{\sqrt{m}}{3} = \sqrt{2}$ , 解得 $m = 18$ .

故选: D.



**例3** 双曲线实轴长为8，离心率为 $\frac{5}{4}$ ，求双曲线的标准方程.

### 解析

设双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  或  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ,

由题意知  $2a = 8, \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$ , 且  $c^2 = a^2 + b^2$ ,  $\therefore a = 4, c = 5, b = 3$

$\therefore$  标准方程为  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$  或  $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ .

**总结：** 待定系数法求 $a, b, c$ 的值：根据题意建立关于 $a, b, c$ 的方程组，解方程即可求得双曲线的标准方程.



## 例4

已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，其渐近线方程为  $y = \pm\sqrt{3}x$ ，则  $C$  的离心率为 ( C )

A.  $\sqrt{2}$

B.  $\sqrt{3}$

C. 2

D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

## 解析

由题意可知  $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$ ，故离心率为  $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = 2$ ，故选:C



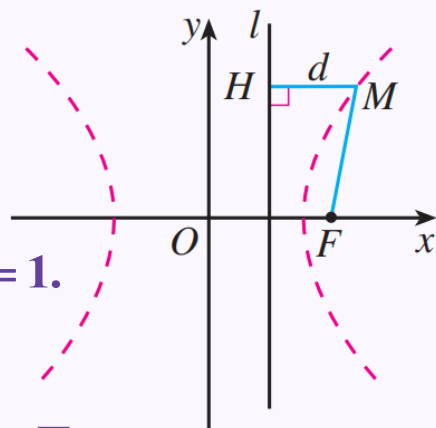
**例5** 动点 $M(x, y)$ 与定点 $F(4, 0)$ 的距离和它到定直线 $l: x = \frac{9}{4}$ 的距离的比是常数 $\frac{4}{3}$ , 求动点 $M$ 的轨迹.

### 解析

设 $d$ 是点 $M$ 到直线 $l$ 的距离, 根据题意, 动点 $M$ 的轨迹就是点的集合

$$P = \left\{ M \mid \frac{|MF|}{d} = \frac{4}{3} \right\}$$

由此得  $\frac{\sqrt{(x-4)^2 + y^2}}{\left| x - \frac{9}{4} \right|} = \frac{4}{3}$  化简得  $7x^2 - 9y^2 = 63$ , 即  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ .



所以, 点 $M$ 的轨迹是焦点在 $x$ 轴上, 实轴长为6, 虚轴长为 $2\sqrt{7}$ 的双曲线.



## 例6

如图, 过双曲线  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$  的右焦点  $F_2$ , 倾斜角为  $30^\circ$  的直线交双曲线于  $A, B$  两点, 求  $|AB|$ .

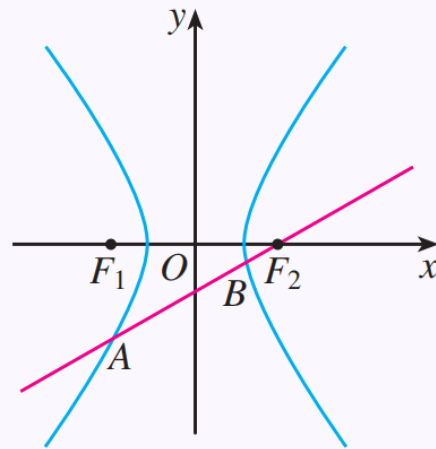
## 解析

由双曲线的标准方程可知, 双曲线的焦点分别为  $F_1(-3, 0), F_2(3, 0)$ ,

所以直线  $AB$  的方程为  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-3)$  ①,

$$\text{由} \begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-3) \\ \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1 \end{cases}, \text{消去} y, \text{得} 5x^2 + 6x - 27 = 0,$$

解方程, 得  $x_1 = -3, x_2 = \frac{9}{5}$ .





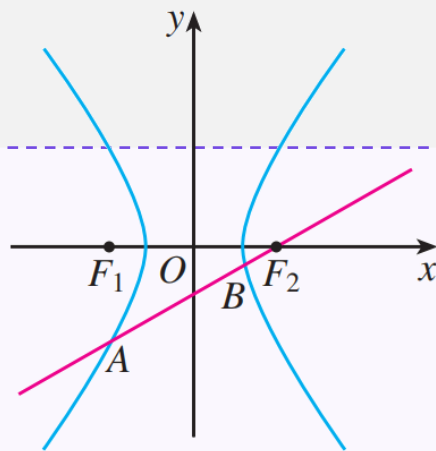
## 例6

如图, 过双曲线  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$  的右焦点  $F_2$ , 倾斜角为  $30^\circ$  的直线交双曲线于  $A, B$  两点, 求  $|AB|$ .

## 解析

将  $x_1, x_2$  的值分别代入①得,  $y_1 = -2\sqrt{3}, y_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{5}$ ,

$$\text{所以 } |AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{\left(-3 - \frac{9}{5}\right)^2 + \left(-2\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2} = \frac{16\sqrt{3}}{5}$$



思考: 是否有不把  $x_1, x_2$  具体的值计算出来, 就能求出弦长的方法呢?

设而不求 的重要数学思想



## 弦长公式

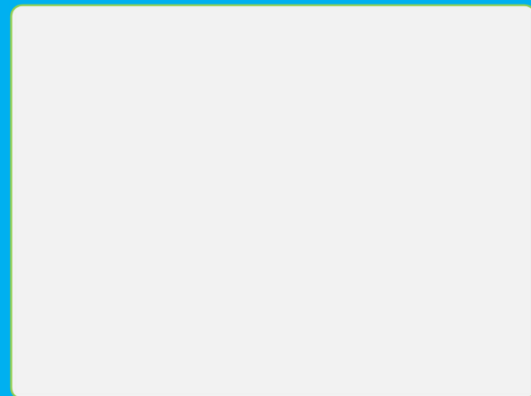
设直线方程 $y = kx + b$ , 直线与曲线的两个交点为 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$

所以有 $y_1 = kx_1 + b$ ,  $y_2 = kx_2 + b$

$$\begin{aligned} \text{所以 } |AB| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + [(kx_1 + b) - (kx_2 + b)]^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (kx_1 - kx_2)^2} = \sqrt{(1 + k^2)(x_1 - x_2)^2} \\ &= \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| \quad (*) \end{aligned}$$

结合韦达定理 $x_1 + x_2$  和 $x_1x_2$  值, (\*) 式可变形为:

$$|AB| = \sqrt{1 + k^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$$





**要求** 利用弦长公式，重新解答例6.

**解析**

由例6可知，消元后得到的一元二次方程为： $5x^2 + 6x - 27 = 0$ ,

由韦达定理得， $x_1 + x_2 = -\frac{6}{5}$ ,  $x_1x_2 = -\frac{27}{5}$

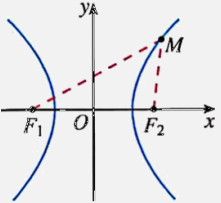
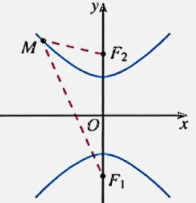
$$\text{所以 } |AB| = \sqrt{(1+k^2)} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right)} \sqrt{\left(-\frac{6}{5}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{27}{5}\right)} = \frac{16\sqrt{3}}{5}$$

$$\text{或解得: } x_1 = -3, x_2 = \frac{9}{5} \quad |AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot |x_1 - x_2| = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \left| -3 - \frac{9}{5} \right| = \frac{16\sqrt{3}}{5}$$



## 课堂总结

## 双曲线的几何性质

焦点的位置	焦点在 $x$ 轴上	焦点在 $y$ 轴上
图形		
标准方程	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 (a > 0, b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0 (a > 0, b > 0)$
范围	$x \leq -a, x \geq a, y \in \mathbf{R}$	$x \in \mathbf{R}, y \leq -a, y \geq a$
顶点	$(\pm a, 0)$	$(0, \underline{\pm a})$
轴长	实轴长 = $2a$ , 虚轴长 = $2b$	实轴长 = <u><math>2a</math></u> , 虚轴长 = <u><math>2b</math></u>
焦点	$(\pm c, 0)$	$(0, \pm c)$
对称性	对称轴: $x$ 轴与 $y$ 轴, 对称中心: 原点	对称轴: <u><math>x</math>轴</u> , <u><math>y</math>轴</u> , 对称中心: <u>原点</u>
渐近线	$y = \pm \frac{b}{a}x$	$y = \pm \frac{a}{b}x$
离心率	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{a}$

