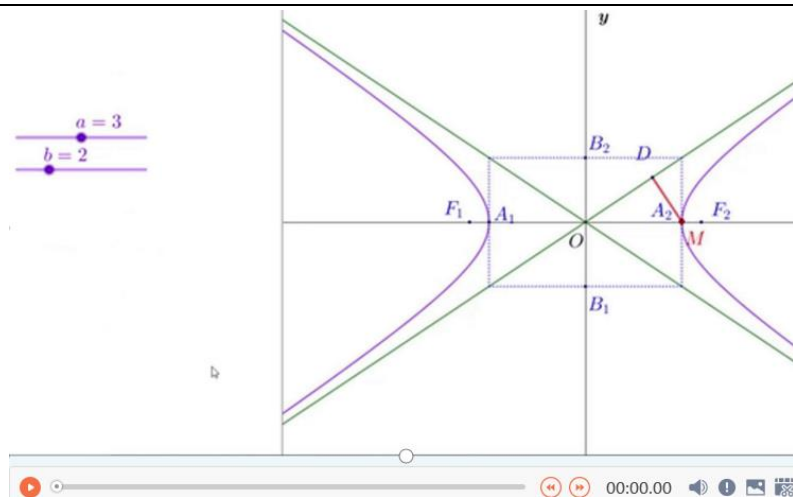


课程基本信息							
章节号	3.2.1	学科	数学	年级	高二	学期	上学期
课题	3.2.1 双曲线及其标准方程						
教科书	书名： 数学选择性必修第一册（人教 A 版） 出版社： 人民教育出版社 出版日期： 2020 年 5 月						
教学人员							
	姓名	单位					
授课教师	周仁哲	东北师范大学附属中学					
教学目标							
1.教学目标 (1) 掌握双曲线的简单几何性质. (2) 理解双曲线的渐近线及离心率的意义. (3) 根据几何条件求出双曲线的方程, 培养数学运算的核心素养.							
教学内容							
本节课以双曲线标准方程为基础, 探究其简单几何性质。先结合 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ (焦点在 x 轴), 通过不等式分析得出 $x \geq a$ 或 $x \leq -a$ 的范围; 依据方程对称性, 推导双曲线关于 x 轴、 y 轴及原点对称; 明确顶点, 引出实轴 (长 $2a$)、虚轴 (长 $2b$) 概念。类比焦点在 x 轴的情况, 简要梳理焦点在 y 轴双曲线的对应性质, 通过例题巩固性质应用, 帮助学生建立方程与几何特征的关联。							
教学过程							
教学环节	主要师生活动						
(一) 情境引入	思考: 为什么当 a, b 的值变化时, 双曲线的开口大小, 线段 A_1A_2 、 DM 长度等都会发生变化? 双曲线与绿色直线会相交吗?						



教师：PPT 展示复习的内容，并要求学生自主完成填空。

双曲线的标准方程

焦点位置	在 x 轴上	在 y 轴上
标准方程	_____	_____
图形		
焦点坐标	(_____, 0)	(0, $\pm c$)
a, b, c 的关系	$c^2 =$ _____	

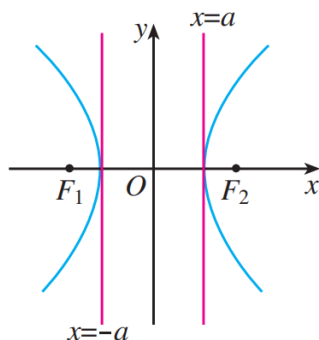
学生：按要求自主完成填空，并做好分享答案的准备。

课前活动：类比椭圆的几何性质的研究，你认为应该研究双曲线

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0) \quad \text{①的哪些几何性质？如何研究这些性质？}$$

提示：范围，对称性、顶点、离心率等

(二) 类比：类比研究椭圆范围的方法，观察双曲线，你可以发现双曲线上点的横坐标和纵坐标的范围分别是什么？



学生：尝试着观察双曲线的图，以及类比椭圆的探究方法，与同桌讨论分析，得出答案.

预设：范围是 $x \leq -a$ ，或 $x \geq a$ ，纵坐标的范围是 $y \in \mathbf{R}$.

要求：请尝试着利用双曲线方程证明你的结论.

学生：从双曲线方程入手，借助 $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1$ ，即可得出横坐标的范围.

预设：由方程①可得

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1,$$

于是，双曲线上点的坐标 (x, y) 都适合不等式 $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$ ， $y \in \mathbf{R}$ 即 $x^2 \geq a^2$ ，

$y \in \mathbf{R}$. 所以 $x \leq -a$ 或 $x \geq a$ ， $y \in \mathbf{R}$.

教师：归纳总结，得出双曲线的第一个几何性质：范围：双曲线位于直线 $x = -a$ 及其左侧和直线 $x = a$ 及其右侧的区域.

类比：类比研究椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 对称性的方法，得到什么结论？

学生：类比椭圆研究对称性的方法，得出结论.

预设：容易得到，双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 关于 x 轴、 y 轴和原点都是对称的.

这时，坐标轴是双曲线的对称轴，原点是双曲线的对称中心双曲线的对称中心叫做双曲线的中心.

教师：归纳总结，得出双曲线的第二个几何性质：对称性：双曲线

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0) \text{ 关于 } x \text{ 轴、 } y \text{ 轴和原点都是对称的.}$$

类比：类比求椭圆顶点的方法，尝试求双曲线的顶点.

学生：进行知识迁移，类比椭圆求顶点的办法，得出双曲线的顶点坐标.

预设：在方程□中，令 $y = 0$ ，得 $x = \pm a$ ，因此双曲线和 x 轴有两个交点 $A_1(-a, 0)$ ，

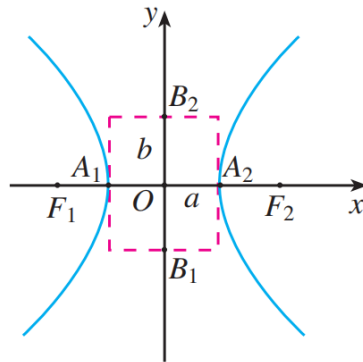
$A_2(a, 0)$ ；令 $x = 0$ ，得 $y = -b^2$ ，这个方程没有实数解，说明双曲线和 y 轴没

有公共点，但我们把 $B_1(0, -b)$ ， $B_2(0, b)$ 两点画在 y 轴上.

两个重要概念：

线段 A_1A_2 叫做双曲线的实轴，它的长等于 $2a$ ， a 叫做双曲线的实半轴长；

线段 B_1B_2 叫做双曲线的虚轴，它的长等于 $2b$ ， b 叫做双曲线的虚半轴长.



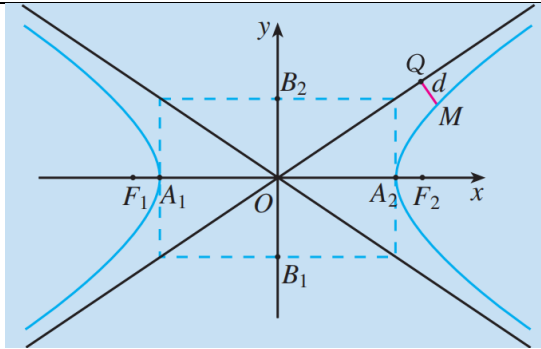
教师：归纳总结，得出双曲线的第三个几何性质：顶点，焦点在 x 轴： $(\pm a, 0)$ ，焦点在 y 轴： $(0, \pm a)$.

探究：利用信息技术画出双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 和两条直线 $\frac{x}{3} \pm \frac{y}{2} = 0$. 在双曲线

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的右支上取一点 M ，测量点 M 的横坐标 x_M 以及它到直线

$\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 0$ 的距离 d . 沿曲线向右上方拖动点 M ，观察 x_M 和 d 的大小关系

，你发现了什么？



教师：通过Geogebra软件进行演示.

学生：通过教师借助信息技术的动态化演示，学生得出结论.

预设：发现点 M 的横坐标 x_M 越来越大， d 越来越小，但是 d 始终不等于0.

思考：经过两点 A_1, A_2 作 y 轴的平行线 $x = \pm 3$ ，经过两点 B_1, B_2 作 x 轴的平行线 $y = \pm 2$ ，四条直线围成一个矩形，求矩形的两条对角线所在直线的方程.

学生：思考，并尝试着求出该直线方程.

预设：矩形的两条对角线所在直线的方程是 $\frac{x}{3} \pm \frac{y}{2} = 0$. 可以发现，双曲线

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的两支向外延伸时，与两条直线 $\frac{x}{3} \pm \frac{y}{2} = 0$ 逐渐接近，但永不相交.

渐近线定义：一般地，双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两支向外延伸时，与两条直线 $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ 逐渐接近，我们把这两条直线叫做双曲线的渐近线. 实际上，双曲线与它的渐近线无限接近，但永不相交.

教师：归纳总结，得出双曲线的第四个几何性质：渐近线，双曲线

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线方程为 $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ ，即 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ；双曲线

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线方程为 $\frac{y}{a} \pm \frac{x}{b} = 0$ ，即 $y = \pm \frac{a}{b}x$.

教师：下面学习双曲线的简单几何性质五：离心率，回顾椭圆离心率的定义，得出双曲线离心率的定义.

学生：回顾椭圆离心率的定义，预猜双曲线离心率定义如下：

双曲线的焦距与实轴长的比 $\frac{c}{a}$ ，叫做双曲线的离心率.

教师：肯定同学们的预猜，类比椭圆的离心率范围： $0 < e < 1$ ，推导双曲线的离心率的范围.

学生：根据 a, c 的大小关系： $c > a > 0$ 可得出， $e > 1$

思考：椭圆的离心率刻画了椭圆的扁平程度，双曲线的离心率刻画双曲线的什么几何特征？

学生：尝试画出不同离心率的双曲线，观察图象得出结论.

预设：双曲线的离心率刻画了双曲线的“张口”大小.

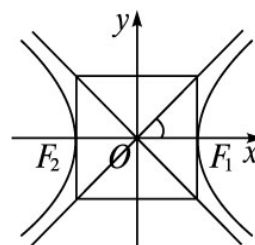
追问：用双曲线渐近线的斜率能刻画双曲线的“张口”大小吗？它与用离心率刻画“张口”大小有什么区别和联系？

学生：继续观察图象，教师借助信息技术演示相关变换.同时，尝试从离心率的公式入手推导出结论.

预设：双曲线离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$

离心率越大， $\frac{b}{a}$ 的值越大，渐近线 $y = \frac{b}{a}x$ 的斜率越大，

双曲线的“张口”越大.



说明：1. 教学环节根据不同内容设置，环节多少可以自行增减；

2. 作业设计单独进行，不在教学设计中体现；

3. 所用符号需用公式编辑器编辑，不可用图片代替。