



志存高远 追求卓越

高二年级下学期第一次月考

数学试题（快班）

满分：150分 时间 120分钟

一、单选题（每小题5分，共40分）

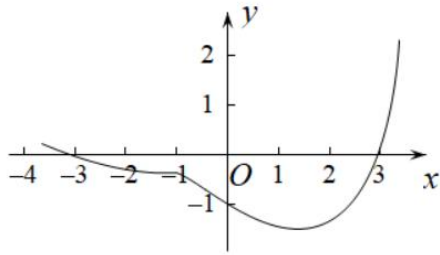
1. 已知函数 $f(x) = \ln x - xf'(1)$ ，则 $f(2) =$ ()

- A. $\ln 2 - 1$ B. $\ln 2 - \frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\ln 2 + 1$

2. 已知 $f(x) = xe^x + 3\sin x$ ，则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 ()

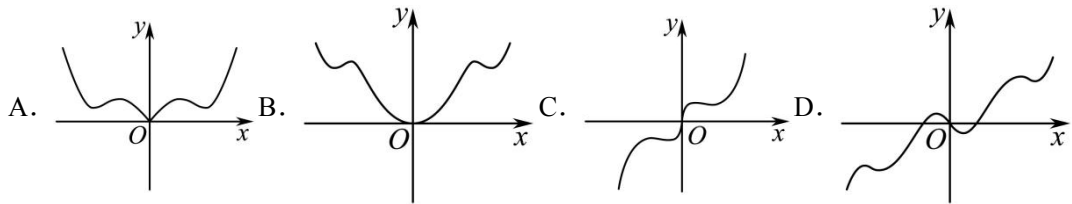
- A. $y = x$ B. $y = 3x$ C. $y = 2x$ D. $y = 4x$

3. 已知函数 $f(x)$ 的导函数的图像如图所示，则下列结论正确的是 ()



- A. -3 是 $f(x)$ 的极小值点 B. -1 是 $f(x)$ 的极小值点
C. $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 3)$ 上单调递减 D. 曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 2$ 处的切线斜率小于零

4. 已知 $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ ， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，则 $y = f'(x)$ 的图象大致是 ()



5. 已知 $1 < m < n < 2$, $a = n^m$, $b = m^n$, $c = \log m$ ，则 a, b, c 的大小关系是 ()

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$
C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

6. 已知函数 $f(x) = xe^x$ ，不等式 $f(\ln x^2) \leq f\left(\frac{m}{x} - 1\right)$ 在 $[e, +\infty)$ 上有解，则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $[4e, +\infty)$ B. $[3e, +\infty)$ C. $(-\infty, 2e]$ D. $(-\infty, 3e]$

7. 函数 $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, 若关于 x 的不等式 $[f(x)]^2 - af(x) \leq 0 (a \in \mathbf{R})$ 有且仅有三个整数解, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{3}{\ln 3}, \frac{5}{\ln 5}\right)$ B. $\left(\frac{2}{\ln 2}, \frac{5}{\ln 5}\right]$
 C. $\left[\frac{2}{\ln 2}, \frac{5}{\ln 5}\right)$ D. $\left(e, \frac{5}{\ln 5}\right]$

8. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $(0, +\infty)$, $f(2) = -1$, 且 $f(x) + xf'(x) = 1$ 对于 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 则 ()

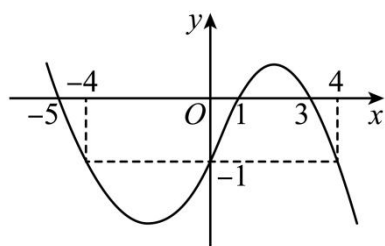
- A. $f(1) = 0$ B. $f(3) = 0$
 C. $f(4) = 0$ D. $f(6) = 0$

二、多选题 (每小题 6 分, 共 18 分)

9. 下列求导运算正确的是 ()

- A. $(e^x \sqrt{x})' = \frac{3}{2} e^x \sqrt{x}$ B. $(2^x - \log_2 x)' = (2^x - x) \ln 2$
 C. $(\cos x)' = -\sin x$ D. $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

10. 已知 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数, 若函数 $y = f'(x) - 1$ 的图象大致如图所示, 则 ()



- A. $f(x)$ 有 3 个极值点 B. $x = -4$ 是 $f(x)$ 的极大值点
 C. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点 D. $f(x)$ 在 $(0, 4)$ 上单调递增

11. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$, $g(x)$, 其导函数分别为 $f'(x)$, $g'(x)$,

$f(1-x) = 6 - g'(1-x)$, $f(1-x) - g'(1+x) = 6$, 且 $g(x+2)$ 为奇函数, 则 ()

- A. $g'(x+6) = g'(x)$ B. $g(x)$ 的图象关于 $x = 1$ 对称
 C. $f'(6) = f'(2)$ D. $f(2021) + f(2023) = 12$



志存高远 追求卓越

三、填空题（每小题 5 分，共 15 分）

12. 曲线 $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ 的对称中心为_____.

13. 函数 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的可导函数, 其导函数为 $f'(x)$, 且满足 $f'(x) + \frac{2}{x}f(x) > 0$, 若不等式 $\frac{ax \cdot f(ax)}{\ln x} \geq \frac{f(\ln x) \cdot \ln x}{ax}$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 上恒成立, 则正实数 a 的取值范围是_____.

14. 已知直线 l 与曲线 $y = e^x$ 相切, 切点为 $M(x_1, y_1)$, 与曲线 $y = (x+3)^2$ 也相切, 切点是 $N(x_2, y_2)$, 则 $x_2 - 2x_1$ 的值为_____.

四、解答题

15. (本题 13 分) (1) 已知函数 $f(x) = 3(2-m^2)x - mx^3$ 在 $x=1$ 处取得极小值, 求 $f(x)$ 的极大值;

(2) 已知函数 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + b$, 若 $a > 0$, 求 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 的最小值.

16 (本题 15 分). 用长为 18m 的钢条围成一个长方体形状的框架, 要求长方体的长与宽之比为 2:1, 问该长方体的长、宽、高各为多少时, 其体积最大? 最大体积是多少?

17 (本题 15 分). 已知函数 $f(x) = x^3 - 2x + 2$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的平均变化率;

(2) 设 $g(x) = 2x + \frac{k}{x}$, 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与曲线 $y = g(x)$ 在点 $(1, g(1))$ 处的切线平行, 求实数 k 的值;

(3) 求过点 $(2, f(2))$ 且与曲线 $y = f(x)$ 相切的直线方程.

18 (本题 17 分). 已知函数 $f(x) = \ln x + ax^2 - x + a + 1$.

(1) 证明曲线 $y = f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线过原点;

(2) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

19 (本题 17 分). (1) 若函数 $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$, $f(x_1) = f(x_2)$, $(x_1 \neq x_2)$, 求 $x_1 x_2$.

(2) 设函数 $h(x) = x - \ln x$, $h(x_1) = h(x_2)$, $(x_2 > x_1 > 0)$,

(i) 证明: $x_1 x_2 < 1$; (ii) 证明: $x_1 x_2^2 < 2$