参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8		
答案	A	D	D	D	A	B	C	C		
题号			9	10	11					
答案			CD	ABD	BCD					

1．A

【分析】求出函数 $f(x)$ 的导数，进而求出 $f'(1)$，再代入计算作答.

【详解】对函数 $f(x)=\ln x-xf'(1)$ 求导得，$f'(x)=\frac{1}{x}-f'(1)$，当 $x=1$ 时，$f'(1)=1-f'(1)$，

解得 $f^{'}(1)=\frac{1}{2}$，则 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x$，

所以 $f(2)=\ln 2-1$.

故选：A

2．D

【分析】求出在点 $(0,f(0))$ 处的导数即为切线的斜率，直接写出切线方程即可.

【详解】因为 $f(x)=xe^{x}+3\sin x$，所以 $f(0)=0$，$f'(x)=e^{x}+xe^{x}+3\cos x$，

所以切线的斜率 $k=f'(0)=1+3=4$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=4x$，

故选：D.

3．D

【分析】根据导函数图像，求得函数单调性，结合极值点定义，即可判断 ABC 选项，根据导数的定义和几何意义即判断 D 选项，从而得出答案.

【详解】由图像知，当 $x<-3$ 或 $x>3$ 时，$f'\left(x\right)>0$，$f\left(x\right)$ 单调递增，

当 $-3<x<3$ 时，$f'\left(x\right)<0$，$f\left(x\right)$ 单调递减，

所以 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(-\infty,-3\right)$，$\left(3,+\infty\right)$ 内单调递增，在区间 $\left(-3,3\right)$ 内单调递减，

-3 是 $f\left(x\right)$ 的极大值点，3 是 $f\left(x\right)$ 的极小值点，故 ABC 错误；

又因为 $f'\left(2\right)<0$，所以曲线 $y=f\left(x\right)$ 在 $x=2$ 处切线斜率小于零，故 D 正确.

故选：D.

4．A

【分析】首先对 $f(x)$ 求导，再利用奇偶性排除 B、D，然后通过取特殊值排除 C 即可.

【详解】因为 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\frac{1}{4}x^2+\cos x$，则 $f'(x)=\frac{1}{2}x-\sin x$，

又因为 $f'(-x)=-\frac{1}{2}+\sin x=-f'(x)$，所以 $f'(x)$ 为奇函数，由此可排除 B、D；

$f'(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{4}-1<0$，说明 $f'(x)$ 的图像在 $(0,+\infty)$ 区间上函数值存在负数，由此 C 不满足，故 A 正确.

故选：A

5．A

【分析】利用幂函数、指数函数、对数函数的性质计算大小即可.

【详解】因为 $1<m<n<2$，所以 $y=n^x,y=m^x,y=\log_n x$ 在 $(0,+\infty)$ 上均单调递增，

所以 $a=n^m>n^1>1,b=m^n>m^1>1,c=\log_n m<\log_n n=1$，即 $a>c,b>c$，

对于 a,b，构造函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

易知 $\mathrm{e}>x>0$ 时，$f'(x)>0$，即此时函数单调递增，则 $f(m)<f(n)\Rightarrow\frac{\ln m}{m}<\frac{\ln n}{n}$，

所以 $n\ln m<m\ln n\Rightarrow\ln m^n<\ln n^m$，

因为 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $m^n<n^m$，

综上 $a>b>c$.

故选：A

6．B

【分析】求导可得函数的单调性，进而分类讨论求解,构造函数 $h(x)=2x\ln x+x$，由单调性即可求解.

【详解】因为 $f(x)=x\mathrm{e}^x$，所以 $f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$，

当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>-1$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

由 $f(\ln x^2)\le f\left(\frac{m}{x}-1\right)$，得 $\ln x^2\cdot\mathrm{e}^{\ln x^2}\le\left(\frac{m}{x}-1\right)\cdot\mathrm{e}^{\frac{m}{x}-1}$，

所以不等式 $2x^3\ln x-(m-x)\mathrm{e}^{\frac{m}{x}-1}\le 0$①在 $[\mathrm{e},+\infty)$ 上有解.

当 $m\le 0$ 时，不等式①显然无解；

当 $m>0$ 时，$\dfrac{m}{x}-1>-1$，$\ln x^2=2\ln x\geq 2>-1$，

所以由 $f\left(\ln x^2\right)\leq f\left(\dfrac{m}{x}-1\right)$，得 $\ln x^2\leq\dfrac{m}{x}-1$，即 $m\geq 2x\ln x+x$ 在 $\left[\mathrm{e},+\infty\right)$ 上有解.

令 $h(x)=2x\ln x+x$，$x\geq\mathrm{e}$，则 $h'(x)=3+2\ln x>0$，所以 $h(x)$ 在 $\left[\mathrm{e},+\infty\right)$ 上为增函数，

所以 $h(x)_{\min}=h(\mathrm{e})=2\mathrm{e}\times\ln\mathrm{e}+\mathrm{e}=3\mathrm{e}$，所以 $m\geq 3\mathrm{e}$.

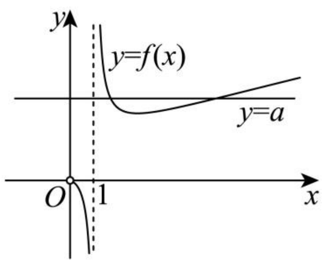
故选:B.

7【详解】对函数求导可得 $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$，令 $f'(x)>0$，解得 $x>\mathrm{e}$，令 $f'(x)<0$，解得 $0<x<\mathrm{e}$，

又 $\ln x=0$ 时，$x=1$，

所以 $f(x)$ 的递增区间为 $(\mathrm{e},+\infty)$，递减区间为 $(0,1)$ 和 $(1,\mathrm{e})$，

作出图象如图所示：



当 $a<0$ 时，由 $[f(x)]^2-af(x)\leq 0$，可得 $a\leq f(x)\leq 0$，

由图象可知，不存在整数点满足条件，

当 $a=0$ 时，由 $[f(x)]^2-af(x)\leq 0$，可得 $f(x)=0$，

由图象可知，不存在整数点满足条件，

当 $a>0$ 时，由 $[f(x)]^2-af(x)\leq 0$，可得 $0\leq f(x)\leq a$，

又 $f(2)=\dfrac{2}{\ln 2}=\dfrac{4}{\ln 4}$，　$f(4)=\dfrac{4}{\ln 4}$，$f(5)=\dfrac{5}{\ln 5}$，

由 $f(x)$ 的递增区间为 $(\mathrm{e},+\infty)$，所以 $f(2)=f(4)<f(5)$，

所以要使 $0\leq f(x)\leq a$ 有三个整数解，则 $\dfrac{2}{\ln 2}\leq a<\dfrac{5}{\ln 5}$，

所以关于 x 的不等式 $[f(x)]^2-af(x)\leq 0(a\in\mathrm{R})$ 有且仅有三个整数解，

则 a 的取值范围为 $[\dfrac{2}{\ln 2},\dfrac{5}{\ln 5})$.

故选：C.

8．C

【详解】令 $g\left(x\right)=xf\left(x\right),x\in\left(0,+\infty\right)$，

$\therefore g'\left(x\right)=f\left(x\right)+xf'\left(x\right)=1$，

$\therefore g\left(x\right)=x+C$（$C$ 为常数），

$\because g\left(2\right)=2f\left(2\right)=-2$，

$\therefore 2+C=-2$，则 $C=-4$，

$\therefore g\left(x\right)=x-4,x\in\left(0,+\infty\right)$，

$\therefore f\left(x\right)=\dfrac{g\left(x\right)}{x}=\dfrac{x-4}{x}=1-\dfrac{4}{x}$，

$\therefore f\left(1\right)=1-4=-3$，故 A 错；

$f\left(3\right)=1-\dfrac{4}{3}=-\dfrac{1}{3}$，故 B 错；

$f\left(4\right)=1-1=0$，故 C 正确；

$f\left(6\right)=1-\dfrac{4}{6}=\dfrac{1}{3}$，故 D 错.

故选：C.

9．CD

【分析】利用求导公式及导数的运算法则逐项计算即得.

【详解】对于 A，$(\mathrm{e}^x\sqrt{x})'=\mathrm{e}^x(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}})$，A 错误；

对于 B，$(2^x-\log_2 x)'=2^x\ln 2-\dfrac{1}{x\ln 2}$，B 错误；

由求导公式得 C 正确，由商的导数运算法则得 D 正确.

故选：CD

10．ABD

【分析】根据图象判断出 $f'\left(x\right)$ 的符号，由此确定正确答案.

【详解】根据函数 $y=f'\left(x\right)-1$ 的图象可知，

在区间 $\left(-\infty,-4\right),\left(0,4\right)$，$f'\left(x\right)>0,f\left(x\right)$ 单调递增；

在区间 $\left(-4,0\right),\left(4,+\infty\right)$，$f'\left(x\right)<0,f\left(x\right)$ 单调递减.

所以$f\left(x\right)$有3个极值点、$x=-4$是$f\left(x\right)$的极大值点、$f\left(x\right)$在$\left(0,4\right)$上单调递增，

$x=0$是$f\left(x\right)$的极小值点，

所以ABD选项正确，C选项错误.

故选：ABD

11.ACD

【详解】由题意可得$\begin{cases} f(1-x)=6-g'(1-x) \\ f(1-x)=6+g'(1+x) \end{cases}$，两式相减可得$g'(1+x)=-g'(1-x)$①，

因为$g\left(x+2\right)$为奇函数，所以$g\left(x\right)$关于$\left(2,0\right)$中心对称，

所以$g(x)+g(4-x)=0$②，②式两边对x求导可得$g'(x)=g'(4-x)$，

结合$g'(1+x)=-g'(1-x)$，可得：$g'(x)=-g'(2-x)$

所以$g'(4-x)=-g'(2-x)$，令$4-x=t$，可得：$g'(t)=-g'(t-2)$，

所以$g'(t)=g'(t-4)$即$g'(t)=g'(t+4)$，故A错，

所以$g(1+x)=g(1-x)+C$,令$x=0$，可得$C=0$，

所以$g(1+x)=g(1-x)$，

所以$g(x)$的图象关于$x=1$对称，故B正确；

因为$f(x)=6-g'(x)$，可知$f(x)$也是周期为4的周期函数，

即$f(x+4)=f(x)$，两边求导可得$f'(x+4)=f'(x)$，所以$f'(6)=f'(2)$，故C正确；

$f(x)$是周期为4的周期函数，所以$f\left(2021\right)+f\left(2023\right)=f\left(1\right)+f\left(3\right)$，

因为$g'(1+x)=-g'(1-x)$，令$x=0$，则$g'(1)=-g'(1)$，即$g'(1)=0$，

又$g'(t)=-g'(t-2)$，所以$g'(-1)=-g'(1)=0$，又因为$g'(x)$是周期为4的周期函数，

则$g'(3)=g'(-1)=0$，由$f(x)=6-g'(x)$可得$\begin{cases} f(1)=6-g'(1)=6 \\ f(3)=6-g'(3)=6 \end{cases}$，

所以$f(1)+f(3)=12$，所以$f\left(2021\right)+f\left(2023\right)=12$，D正确.

故选：BCD

12．$(1,1)$

【详解】设$f\left(x\right)=-x^3+3x^2-1$，设函数$f\left(x\right)$的对称中心为$\left(a,b\right)$，则$f\left(a+x\right)+f\left(a-x\right)=2b$，

等式$f\left(a+x\right)+f\left(a-x\right)=2b$两边求导得$f'\left(a+x\right)-f'\left(a-x\right)=0$，即$f'\left(a+x\right)=f'\left(a-x\right)$，

所以，函数$f'\left(x\right)$的图象关于直线$x=a$对称，

因为$f'\left(x\right)=-3x^2+6x$，故函数$f'\left(x\right)$的图象关于直线$x=1$对称，则$a=1$，

因为$f\left(1+x\right)+f\left(1-x\right)=-\left(1+x\right)^3+3\left(1+x\right)^2-1-\left(1-x\right)^3+3\left(1-x\right)^2-1=2$，

所以，函数$y=-x^3+3x^2-1$的对称中心为$\left(1,1\right)$.

故答案为：$\left(1,1\right)$.

13．$\left[\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$

【详解】设$F\left(x\right)=x^2f\left(x\right)$，则$F'\left(x\right)=2xf\left(x\right)+x^2f'\left(x\right)=x^2\left[f'\left(x\right)+\frac{2}{x}f\left(x\right)\right]$.

由$f'\left(x\right)+\frac{2}{x}f\left(x\right)>0$得$F'\left(x\right)>0$在$\left(0,+\infty\right)$上恒成立.

所以$F\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$单调递增.

当$a>0$，$x>1$时，不等式$\frac{ax\cdot f\left(ax\right)}{\ln x}\geq\frac{f\left(\ln x\right)\cdot\ln x}{ax}$可化为：$\left(ax\right)^2\cdot f\left(ax\right)\geq\left(\ln x\right)^2\cdot f\left(\ln x\right)$，

所以$ax\geq\ln x\Rightarrow a\geq\frac{\ln x}{x}$（$x>1$）.

设$g\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}$，则$g'\left(x\right)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

由$g'\left(x\right)>0\Rightarrow 1<x<\mathrm{e}$；由$g'\left(x\right)<0\Rightarrow x>\mathrm{e}$.

所以$g\left(x\right)$在$\left(1,\mathrm{e}\right)$上单调递增，在$\left(\mathrm{e},+\infty\right)$上单调递减.

所以$g\left(x\right)_{\max}=g\left(\mathrm{e}\right)=\frac{\ln\mathrm{e}}{\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

所以$a\geq\frac{1}{\mathrm{e}}$.

所以正实数a的取值范围是$\left[\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$.

故答案为：$\left[\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$

14．1

【详解】设直线l与曲线$y=\mathrm{e}^x$相切于$M\left(x_1,y_1\right)$，又$y'=\mathrm{e}^x$，所以直线l的斜率为$k=\mathrm{e}^{x_1}$，

则M处的切线方程为$y-\mathrm{e}^{x_1}=\mathrm{e}^{x_1}\left(x-x_1\right)$，即$y=\mathrm{e}^{x_1}x+\left(1-x_1\right)\mathrm{e}^{x_1}$；

直线 l 与曲线 $y=(x+3)^2$ 相切于 $N(x_2,y_2)$，$y'=2(x+3)$，

可得切线方程为 $y-(x_2+3)^2=2(x_2+3)(x-x_2)$，

即 $y=2(x_2+3)x+9-x_2^2$，

因为直线 l 与两条曲线都相切，所以两条切线相同，

则 $e^{x_1}=2(x_2+3)>0$ 且 $(1-x_1)e^{x_1}=9-x_2^2$，

则 $(1-x_1)\times 2(x_2+3)=9-x_2^2$，即 $(1-x_1)[2(x_2+3)]=(3-x_2)(3+x_2)$

可得 $2(1-x_1)=3-x_2$，解得 $x_2-2x_1=1$，

故答案为：1.

15．（1） 极大值为 4；（2） $f(x)_{\min}=\begin{cases}2-a+b, a\geq 3\\ -\dfrac{a^3}{27}+b, 0<a<3\end{cases}$

【详解】（1）由题得 $f'(x)=3(2-m^2)-3mx^2$，因为函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，

所以 $f'(1)=3(2-m^2)-3m=-3(m^2+m-2)=0\Rightarrow m=-2$ 或 $m=1$，

当 $m=-2$ 时，$f(x)=-6x+2x^3$，$f'(x)=-6+6x^2=-6(1-x^2)=-6(1+x)(1-x)$，

所以当 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(-1,1)$ 时，$f'(x)<0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，符合题意，

所以函数在 $x=-1$ 处取得极大值为 $f(-1)=4$；

当 $m=1$ 时，$f(x)=3x-x^3$，$f'(x)=3-3x^2=3(1+x)(1-x)$，

所以当 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(-1,1)$ 时，$f'(x)>0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，不符合题意；

综上 $m=-2$，$f(x)$ 的极大值为 4.

（2）$f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{a}{3}$，

当$a>0$时，则当$x<0$或$x>\frac{a}{3}$时$f'(x)>0$，当$0<x<\frac{a}{3}$时$f'(x)<0$，

所以$f(x)$的单调增区间为$(-\infty,0)$，$\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$，单调减区间为$\left(0,\frac{a}{3}\right)$；

若$\frac{a}{3}\geq 1$，即$a\geq 3$时$f(x)$在$[0,1]$上单调递减，

所以$f(x)$在$[0,1]$上的最小值为$f(x)_{\min}=f(1)=2-a+b$，

若$0<\frac{a}{3}<1$，即$0<a<3$时，$f(x)$在$\left(0,\frac{a}{3}\right)$单调递减，在$\left(\frac{a}{3},1\right)$单调递增，

所以$f(x)$在$[0,1]$的最小值为$f(x)_{\min}=\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^3}{27}+b$，

所以$f(x)_{\min}=\begin{cases}2-a+b,a\geq 3\\ -\frac{a^3}{27}+b,0<a<3\end{cases}$.

16．长为2 m，宽为1m，高为$\frac{3}{2}$m时，体积最大，最大体积为3 m^3

【分析】设出长方体的宽为x m，表达出长方体的长和高，从而体积$V=-6x^3+9x^2$，并根据长宽高均大于0，求出$0<x<\frac{3}{2}$，求导后得到$V=-6x^3+9x^2$的单调性和极值，最值情况，并确定此时的长、宽、高.

【详解】设长方体的宽为x m，则长方体的长为$2x$ m，故长方体的高为$\frac{18-12x}{4}=\left(\frac{9}{2}-3x\right)$m，

由$\begin{cases}x>0\\ 2x>0\\ \frac{9}{2}-3x>0\end{cases}$，解得：$0<x<\frac{3}{2}$，

设长方体的体积为V，

故$V=2x\cdot x\cdot\left(\frac{9}{2}-3x\right)=-6x^3+9x^2$，$0<x<\frac{3}{2}$

则$V'=-18x^2+18x$，

令$V'=-18x^2+18x>0$，解得：$0<x<1$，

令$V'=-18x^2+18x<0$，解得：$1<x<\frac{3}{2}$，

故$V=-6x^3+9x^2$在$0<x<1$上单调递增，在$1<x<\frac{3}{2}$上单调递减，

故$V=-6x^3+9x^2$在$x=1$处取得极大值，也是最大值，最大值为$V=-6+9=3$ m^3，

此时长为$2x=2$m，宽为1m，高为$\frac{9}{2}-3x=\frac{3}{2}$m.

17．(1)2

(2)1

(3) $y=10x-14$ 或 $y=x+4$

【分析】(1）根据平均变化率公式，即可求解；

（2）利用导数求的几何意义求切线斜率，利用斜率相等，即可求解；

（3）首先设切点$\left(x_0,x_0^3-2x_0+2\right)$，利用导数的几何意义求切线方程.

【详解】(1）函数$f\left(x\right)$在区间$\left[0,2\right]$上的平均变化率为$\dfrac{f\left(2\right)-f\left(0\right)}{2-0}=\dfrac{4}{2}=2$；

（2）$f\left(x\right)=x^3-2x+2$，$f'\left(x\right)=3x^2-2$，$f'\left(1\right)=1$，

$g\left(x\right)=2x+\dfrac{k}{x}$，$g'\left(x\right)=2-\dfrac{k}{x^2}$，$g'\left(1\right)=2-k$，

由题意可知，$2-k=1$，得$k=1$；

（3）$f\left(2\right)=6$，设切点为$\left(x_0,x_0^3-2x_0+2\right)$，$f'(x_0)=3x_0^2-2$，

则曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(x_0,x_0^3-2x_0+2\right)$处的切线方程为$y-\left(x_0^3-2x_0+2\right)=\left(3x_0^2-2\right)\left(x-x_0\right)$，切线过点$\left(2,6\right)$，

则$6-\left(x_0^3-2x_0+2\right)=\left(3x_0^2-2\right)\left(2-x_0\right)$，化简为$x_0^3-3x_0^2+4=0$，

即$\left(x_0-2\right)\left(x_0^2-x_0-2\right)=0$，则$\left(x_0-2\right)^2\left(x_0+1\right)=0$，

得$x_0 = 2$或$x_0=-1$，

当$x_0 = 2$时，切线方程为$y=10x-14$，

当$x_0=-1$时，切线方程为$y=x+4$，

综上可知，切线方程为$y=10x-14$或$y=x+4$.

18．(1)证明见解析

(2)答案见解析

【分析】(1）可求得切点为$(1,2a)$，斜率$k=2a$，则切线方程为$y=2ax$，则恒过原点；

（2）首先求函数$f\left(x\right)$的导数，当$a=0$时，$f'(x)>0$和$f'(x)<0$，可得$f\left(x\right)$的单调区间；

当$a\neq 0$时，令$t\left(x\right)=2ax^2-x+1$，当$a>0$时由$t\left(x\right)=2ax^2-x+1$的判别式$\Delta\leq 0$和$\Delta>0$，讨论出函数$f\left(x\right)$的单调区间；当$a<0$时，$t\left(x\right)=2ax^2-x+1$的判别式$\Delta>0$，讨论出函数$f\left(x\right)$

的单调区间.

【详解】（1）由题设得 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+2ax-1(x>0)$ ，所以 $f'(1)=1+2a-1=2a$ ，

又因为 $f(1)=a-1+a+1=2a$ ，所以切点为 $(1,2a)$ ，斜率 $k=2a$ ，

所以切线方程为 $y-2a=2a(x-1)$ ，即 $y=2ax$ 恒过原点.

（2）由（1）得 $f'(x)=\dfrac{2ax^2-x+1}{x}(x>0)$ ，

当 $a=0$ 时， $f'(x)=\dfrac{-x+1}{x}$ ，

当 $x\in(0,1)$ 时， $f'(x)>0$ ， $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $f'(x)<0$ ， $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a\neq0$ 时，令 $t\left(x\right)=2ax^2-x+1$，则 $\Delta=1-8a$，

当 $a>0$ 且 $\Delta=1-8a\leq0$ 时，即 $a\geq\dfrac{1}{8}$ 时， $f'(x)\geq0$ ， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

当 $0<a<\dfrac{1}{8}$ 时， $\Delta=1-8a>0$，

由 $t\left(x\right)=2ax^2-x+1>0$，则 $0<x<\dfrac{1-\sqrt{1-8a}}{4a}$ ，或 $x>\dfrac{1+\sqrt{1-8a}}{4a}$，则 $f'(x)>0$ ，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1-\sqrt{1-8a}}{4a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1+\sqrt{1-8a}}{4a},+\infty\right)$ 上单调递增；

由 $t\left(x\right)=2ax^2-x+1<0$，则 $\dfrac{1-\sqrt{1-8a}}{4a}<x<\dfrac{1+\sqrt{1-8a}}{4a}$ ，则 $f'(x)<0$ ，

所以 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{1-\sqrt{1-8a}}{4a},\dfrac{1+\sqrt{1-8a}}{4a}\right)$ 上单调递减；

当 $a<0$ 时， $\Delta=1-8a>0$ ，则 $t\left(x\right)=2ax^2-x+1$ 为开口向下的二次函数，

对称轴 $x=\dfrac{1}{4a}<0$ ， $t\left(0\right)=1$ ， $t\left(\dfrac{1}{4a}\right)=1-\dfrac{1}{8a}>1$ ，

由 $t\left(x\right)=2ax^2-x+1>0$，则 $0<x<\dfrac{1-\sqrt{1-8a}}{4a}$ ，则 $f'(x)>0$ ，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1-\sqrt{1-8a}}{4a}\right)$ 上单调递增，

由 $t\left(x\right)=2ax^2-x+1<0$，则 $x>\dfrac{1-\sqrt{1-8a}}{4a}$，则 $f'(x)<0$ ，所以 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{1-\sqrt{1-8a}}{4a},+\infty\right)$ 上单调递减；

综上：当 $a=0$ 时， $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增， $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a\ge\frac{1}{8}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $0<a<\frac{1}{8}$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1+\sqrt{1-8a}}{4a},+\infty\right)$ 上单调递增，$f(x)$ 在 $\left(\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4a},\frac{1+\sqrt{1-8a}}{4a}\right)$ 上单调递减；

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4a},+\infty\right)$ 上单调递减，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4a}\right)$ 上单调递增.

19.（1）$x_1x_2=\frac{1}{2}$；（2）（i）证明见解析；（ii）证明见解析.

【分析】（1）根据给定条件，由 $2x_1+\frac{1}{x_1}=2x_2+\frac{1}{x_2}$ 求出 x_1x_2.

（2）（i）求出 $h(x)$ 的导数，确定 x_1,x_2 范围，结合极值点偏移构造函数，利用导数证得不等式.

（ii）利用（i）的结论 $x_1x_2<1$，分 $1<x_2\le 2$ 和 $x_2>2$ 两种情况进行求解，当 $1<x_2\le 2$ 时，$x_1x_2^2=x_1x_2\cdot x_2<2$，当 $x_2>2$ 时，构造差函数，利用导数推理得到结论.

【详解】（1）函数 $f(x)=2x+\frac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

对任意的 $x_1,x_2\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且 $x_1\ne x_2$，有 $2x_1+\frac{1}{x_1}=2x_2+\frac{1}{x_2}$，

即 $2x_1-2x_2+\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=2(x_1-x_2)+\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}=(x_1-x_2)(2-\frac{1}{x_1x_2})=0$，因此 $\frac{1}{x_1x_2}=2$，

所以 $x_1x_2=\frac{1}{2}$.

（2）（i）函数 $h(x)=x-\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，求导得 $h'(x)=1-\frac{1}{x}$，

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$，函数 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增，

$h(x)_{\min}=h(1)=1$，由 $h(x_1)=h(x_2),(x_2>x_1>0)$，得 $0<x_1<1<x_2$，

不等式 $x_1x_2<1\Leftrightarrow x_2<\frac{1}{x_1}\Leftrightarrow h(x_2)<h(\frac{1}{x_1})\Leftrightarrow h(x_1)<h(\frac{1}{x_1})$，

令函数 $g(x)=h(x)-h(\frac{1}{x})=x-\ln x-(\frac{1}{x}+\ln x)=x-2\ln x-\frac{1}{x},0<x<1$，

求导得 $g'(x)=1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=(1-\frac{1}{x})^2>0$，函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

则 $g(x)<g(1)=0$，即 $h(x)<h(\frac{1}{x})$，而 $0<x_1<1$，因此 $h(x_1)<h(\frac{1}{x_1})$，

所以 $x_1x_2<1$.

（ii）由（i）知 $x_1x_2<1$，当 $1<x_2\le 2$ 时，$x_1x_2^2=x_1x_2\cdot x_2<2$，而 $x_1-\ln x_1=x_2-\ln x_2$，

当 $x_2>2$ 时，令 $h(x_1)-h(\frac{2}{x_2^2})=x_1-\ln x_1-\frac{2}{x_2^2}+\ln\frac{2}{x_2^2}=x_1-\ln x_1-\frac{2}{x_2^2}+\ln 2-2\ln x_2$

$=x_2-\ln x_2-\frac{2}{x_2^2}+\ln 2-2\ln x_2=x_2-3\ln x_2-\frac{2}{x_2^2}+\ln 2$，

令函数 $\varphi(x)=x-3\ln x-\frac{2}{x^2}+\ln 2, x>2$，求导得 $\varphi'(x)=1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^3}=\frac{(x-2)^2(x+1)}{x^3}>0$，

函数 $\varphi(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，$\varphi(x)>\varphi(2)=\frac{3}{2}-2\ln 2=\frac{1}{2}\ln\frac{e^3}{16}>0$，

因此 $h(x_1)-h(\frac{2}{x_2^2})=x_2-3\ln x_2-\frac{2}{x_2^2}+\ln 2=\varphi(x_2)>0$，即 $h(x_1)>h(\frac{2}{x_2^2})$，

又 $x_1\in(0,1),\frac{2}{x_2^2}\in(0,1)$，且函数 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，则 $x_1<\frac{2}{x_2^2}, x_1x_2^2<2$，

所以 $x_1x_2^2<2$.